

0. Vollständige Induktion

Wenn man vor der Aufgabe steht, für jede natürliche Zahl n eine Aussage $A(n)$ zu beweisen, ist es offensichtlich nicht durch sukzessives Zeigen von $A(1), A(2), \dots$ möglich die Aussage beweisen, weil es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Man nutzt dann dabei das Prinzip der *vollständigen Induktion*, bei dem man sich die Eigenschaft der natürlichen Zahlen zu Nutze macht. Hierfür muss man zwei Behauptungen zeigen:

Induktionsanfang¹: Zeige, dass die Aussage $A(1)$ wahr ist.²

Induktionsschritt³: Zeige für beliebiges $n \in \mathbb{N}$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.⁴

Im Induktionsschritt nennt man dabei $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* und $A(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*. Dabei wird häufig das Prinzip der vollständigen Induktion im Dreischritt Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung und Induktionsschritt durchgeführt. Die Induktionsvoraussetzung kann aus der Aufgabe entnommen werden, wird als gültig für **ein** $n \in \mathbb{N}$ angenommen und im Induktionsschritt verwendet.

i **Beispiel (Gaußsche Summenformel)**: Zu zeigende Aussage: Es gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang (für $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Die zu zeigende Induktionsbehauptung ist $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Diese lässt sich mit der Induktionsvoraussetzung (I.V.) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, welche für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

und damit ist die Aussage bewiesen.

¹ Selten auch **Induktionsverankerung** genannt.

² In manchen Fällen kann/muss dies für eine andere natürliche Zahl erfolgen, z.B. wenn die Aussage $A(n)$ nur für $n \geq 2$ gilt. In diesem Fall würde man im Induktionsanfang $A(2)$ zeigen.

³ Manchmal auch **Induktionsschluss** genannt.

⁴ Es ist auch möglich $A(n-1) \Rightarrow A(n)$ zu zeigen, da dies hierzu äquivalent ist. Je nach zu zeigender Aussage, kann dies einfacher sein.

1. Folgen und Reihen

1.1. Definition und Charakterisierung von Folgen

Unter einer *Folge* versteht man eine Funktion, deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen \mathbb{N} ist.⁵ Meist betrachtet man dabei reellwertige Folgen, d.h. Funktionen a der Form $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei wird jeder natürlichen Zahl n ein *Folgenglied* $a_n = a(n)$ zugeordnet. Man schreibt für eine Folge auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_n$ oder (a_1, a_2, a_3, \dots) .

Es gibt dabei verschiedene Möglichkeiten den Folgengliedern Werte zuzuordnen. Existiert ein Funktionsterm, der jedem Folgenglied in Abhängigkeit von n einen Wert zuweist, spricht man von einer *explizit definierten Folge*. Wird ein Folgenglied in Abhängigkeit von einem oder mehreren vorherigen Folgenglieder definiert, so spricht man von einer *rekursiv definierten Folge*. Essenziell hierbei ist die Angabe eines Startwerts (bzw. mehrerer), da ansonsten die Folge nicht eindeutig definiert ist.

i Beispiele: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, \dots)$ ist die Folge der Quadratzahlen. Ihr explizites Bildungsgesetz ist $a_n = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert als $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (für $n \geq 3$) mit $f_1 = f_2 = 1$.

1.2. Bekannte Folgen

Im Folgenden ist eine kleine Auswahl bekannter Folgen gegeben:

1.2.1. Arithmetische Folge

Bei einer arithmetischen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Differenz d zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder stets konstant. Es gilt demnach $a_{n+1} = a_n + d$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese rekursive Darstellung lässt sich auch in eine explizite Darstellung überführen:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Eine arithmetische Folge ist durch Angabe von d und a_1 eindeutig charakterisiert.

i Beispiel: Beim Überziehen eines Kontos werden i.d.R. täglich Sollzinsen berechnet. Diese Zinsen steigen linear von Tag zu Tag an, was damit einer arithmetischen Folge entspricht. Bei einer Überziehung von 1000 € und einem Zinssatz von 9 % pro Jahr fallen beispielweise täglich Überziehungszinsen von 0,25 € an (unter der Annahme der 30/360-Methode⁶). Die Überziehungszinsen am Tag t entsprechen somit $t \cdot 0,25$ €; hierbei ist $d = 0,25$ € und $a_1 = 0,25$ €.

⁵ Es ist auch möglich als Definitionsbereich \mathbb{N}_0 oder andere unendliche Teilmengen von \mathbb{Z} zu nutzen.

⁶ In Deutschland geläufige Zinsmethode. Hierbei umfasst ein Zinsmonat 30 Tage und ein Zinsjahr 360 Tage. Im Beispiel entstehen $0,09 \cdot 1000 \text{ €} = 90 \text{ €}$ Zinsen im Jahr, die auf 360 Tage verteilt werden. Dies entspricht $\frac{90 \text{ €}}{360} = 0,25 \text{ €}$ pro Tag.

1.2.2. Geometrische Folge

Bei einer geometrischen Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist der Quotient $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder stets konstant. Es gilt demnach $b_{n+1} = q \cdot b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese rekursive Darstellung lässt sich auch in eine explizite Darstellung überführen:

$$b_n = q^n \cdot b_1$$

Eine geometrische Folge ist durch Angabe von q und b_1 eindeutig charakterisiert.

i Beispiel: Beim Zinseszins werden nicht nur auf das ursprüngliche Kapital Zinsen erhoben, sondern auch auf bereits angefallene Zinsen. Diese Zinsen werden dem Kapital hinzugefügt und anschließend zusammen erneut verzinst. Bei einer Anlage von 40.000 € in ein Sparbuch, das jährlich mit 1 % verzinst wird, beschreibt die (geometrische) Folge $1,01^n \cdot 40\,000$ das angesparte Kapital auf dem Sparbuch nach n Jahren.

1.3. Eigenschaften von Folgen

Da es sich bei Folgen um spezielle Funktionen handelt, übertragen sich einige Definitionen und Eigenschaften aus denen des Funktionsbegriffs.

1.3.1. Monotonie

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

- (i) *monoton wachsend* $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- (ii) *monoton fallend* $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Sie heißt *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*), wenn in (i) (bzw. (ii)) die strikten Ungleichungen $<$ (bzw. $>$) gelten.

1.3.2. Beschränktheit

Im Falle einer reellwertigen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt diese *beschränkt*, wenn es zwei reelle Zahlen s und S gibt, sodass

$$s \leq x_n \leq S \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Hierbei wird s als untere Schranke und S als obere Schranke bezeichnet.

1.3.3. Konvergenz

Eine reellwertige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |x_n - a| < \varepsilon$$

Gelesen: „Es existiert ein a aus \mathbb{R} , sodass für alle $\varepsilon > 0$ ein N aus \mathbb{N} existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_n - a| < \varepsilon$.“

In diesem Fall nennt man a den *Grenzwert* oder *Limes* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ oder } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Im Falle der Existenz ist dieser Grenzwert eindeutig. Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie *divergent*.

Jede konvergente Folge ist auch beschränkt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie das Beispiel $x_n = (-1)^n$ zeigt.⁷ Allerdings ist jede monotone, beschränkte reellwertige Folge auch konvergent.

Grafische Veranschaulichung der Konvergenzdefinition:

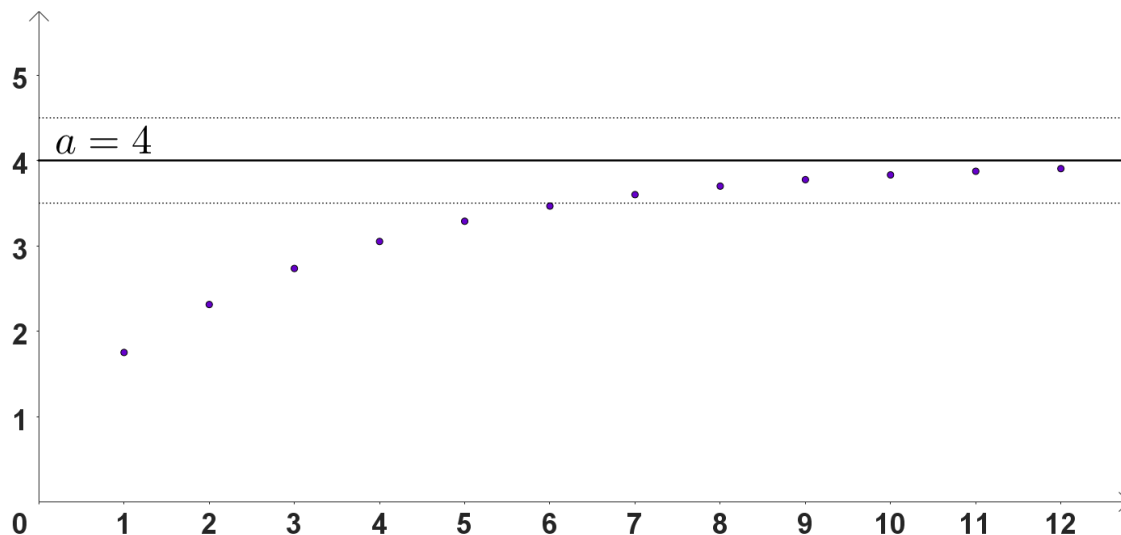


Abbildung 1: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (blaue Punkte), die gegen $a = 4$ konvergiert. Für den gestrichelten Abstand, der einem $\varepsilon > 0$ entspricht, liegen alle Folgenglieder x_n ab $n = 7$ nahe genug an a .

1.4. Reihen

Definiert man für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die endlichen Summen s_n

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k, n \in \mathbb{N}_0$$

so bilden diese wiederum eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die man *Reihe* nennt. Diese schreibt man oft als

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Das n -te Folgenglied s_n nennt man n -te *Partialsumme* der Reihe und x_k den k -ten *Summanden* der Reihe. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ heißt *konvergent* (bzw. *divergent*), wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen *konvergent* (bzw. *divergent*) ist; ist $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, so schreibt man

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Damit wird hier also mit dem Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ sowohl die Reihe als auch (bei Existenz) der Grenzwert der Reihe bezeichnet.

⁷ Für einen Beweis siehe z.B. Tretter, C. (2013). *Analysis I*. Springer Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0349-6>, S. 25



Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ ist divergent, weil $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq \sum_{k=1}^n 1 = n, n \in \mathbb{N}$$

Ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ ist, dass die zugrunde liegende Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Man spricht auch davon, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine *Nullfolge* sein muss.

1.4.1. Die harmonische Reihe

Ein Beispiel, dass das Kriterium der Nullfolge nicht hinreichend ist, liefert die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, die divergiert (also nicht konvergiert). Dies kann man z.B. durch eine geschickte Abschätzung zeigen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

1.4.2. Die geometrische Reihe

Die *geometrische Reihe* ist von besonderer Bedeutung in der Mathematik, da sie eine der einfachsten und grundlegendsten Reihen darstellt. Sie ist definiert als

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k, q \in \mathbb{R}.$$

Ihr Name lässt sich darauf zurückführen, dass die Summanden der geometrischen Reihe selbst eine geometrische Folge bilden.⁸ Sie konvergiert im Falle von $|q| < 1$ mit

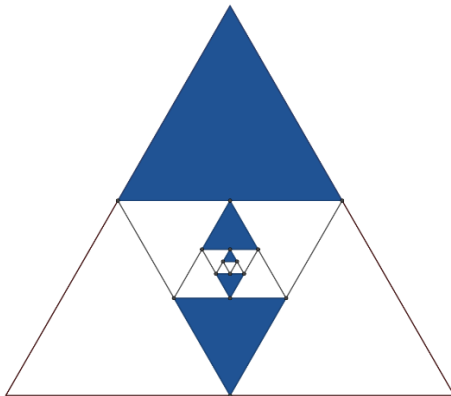
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

und divergiert im Falle von $|q| \geq 1$.

⁸ Und umgekehrt führt die unendliche Summenbildung einer beliebigen geometrischen Folge $a \cdot q^k$ mit $a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch Ausklammern auch zu einer geometrischen Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k = a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$.



Beispiel: Die geometrische Reihe liefert für $q = \frac{1}{4}$ den Zusammenhang $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}$. Dieser lässt sich auch geometrisch begründen:



Als Ausgangsobjekt dient ein gleichseitiges Dreieck mit Flächeninhalt 4. Verbindet man dessen Seitenmitten miteinander entstehen vier kongruente, gleichseitige Dreiecke mit Flächeninhalt 1. Dieses Verfahren wird nun iteriert, indem das Einbeschreiben neuer gleichseitiger Dreiecke stets in „dem mittleren Dreieck“ wiederholt wird. Dabei färbt man in jedem Schritt genau eines der „äußeren“ Dreiecke ein, die nicht weiter zerlegt werden. Nebenstehend sind die ersten fünf Iterationsschritte gezeichnet. Insgesamt werden im Grenzprozess $\frac{1}{3}$ des

ursprünglichen gleichseitigen Dreiecks – also ein Flächeninhalt von $\frac{4}{3}$ – eingefärbt. Denn von den drei kongruenten äußeren Dreiecken wird ein Drittel eingefärbt und das verbleibende mittlere Dreieck wird analog zerlegt, wobei wieder ein Drittel der „neuen äußeren“ Dreiecke eingefärbt wird usw. Da die Gesamtfläche der eingefärbten Dreiecke aber auch über die (unendliche) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots$ beschrieben werden kann, gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}$.

Diese Formel für die geometrische Reihe lässt sich mit Hilfe der *geometrischen Summenformel* herleiten. Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt nämlich

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

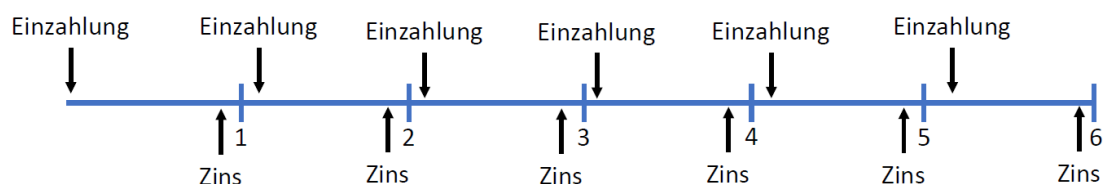
Wenn man nun $n \rightarrow \infty$ betrachtet, folgt die Aussage aufgrund der Grenzwertrechenregeln. Die geometrische Summenformel wiederum kann mit Hilfe folgender Begründung aufzeigen⁹:

Multipliziert man $(1 - q)$ an den Term $(1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n)$, was wegen $q \neq 1$ erlaubt ist, so erhält man

$$(1 - q) \cdot (1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n) = 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n \\ - q^1 - q^2 - \dots - q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

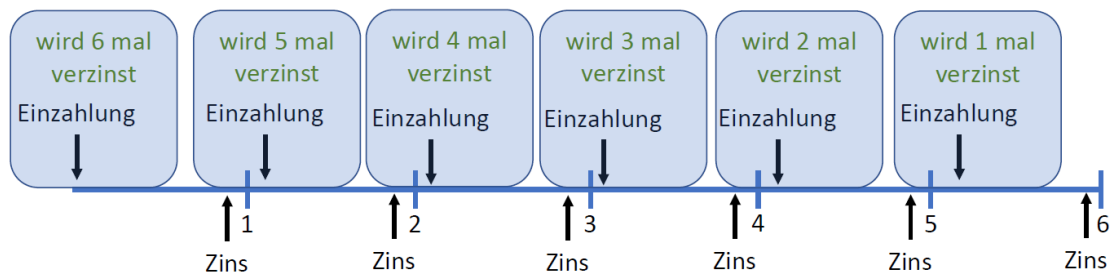


Beispiel: 6 Jahre lang wird zum Jahresbeginn immer derselbe Betrag (3.000 €) auf ein Konto einbezahlt (*vorschüssig*). Zum Jahresende werden immer 2 % Zinsen (inkl. Zinseszins) gutgeschrieben. Auf einem Zeitstrahl sähe das dann in etwa so aus:



⁹ Alternativ lässt sich die geometrische Summenformel auch mittels vollständiger Induktion zeigen.

Bei der Berechnung des Kontostandes nach 6 Jahren ist zu beachten, dass die Einzahlungen (sowie Zinsen) unterschiedlich oft verzinst werden:



Der Kontostand nach 6 Jahren (nennen wir ihn s_6) beträgt damit

$$s_6 = 3\,000 \text{ €} \cdot (1,02)^6 + 3\,000 \text{ €} \cdot (1,02)^5 + 3\,000 \text{ €} \cdot (1,02)^4 + 3\,000 \text{ €} \cdot (1,02)^3 + 3\,000 \text{ €} \cdot (1,02)^2 + 3\,000 \text{ €} \cdot (1,02)^1 = 3\,000 \text{ €} \cdot \sum_{k=1}^6 1,02^k$$

Da die allgemeine geometrische Summenformel bei $k = 0$ startet, muss noch eine „geschickte 0“ eingefügt werden:

$$s_6 = 3\,000 \text{ €} \cdot \sum_{k=0}^6 1,02^k - (3\,000 \text{ €} \cdot 1,02^0) = 3\,000 \text{ €} \cdot \frac{1 - 1,02^{n+1}}{1 - 1,02} - 3\,000 \text{ €} \approx 19\,300 \text{ €}$$

2. Taylorpolynome und -entwicklung

2.1. Taylorpolynome

Um komplizierte Funktionen untersuchen zu können, kann es notwendig sein, diese (lokal) durch „einfachere“ Funktionen zu approximieren, genauer gesagt durch sog. *Taylorpolynome*¹⁰. Das sind Polynome vom Grad n , die an einer festen Stelle (der sog. *Entwicklungsstelle*¹¹) dieselben k -ten Ableitungen (für $k = 0, 1, \dots, n$) besitzen wie die zu untersuchende Funktion. Als Voraussetzung muss eine solche Funktion f aber zumindest auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar sein. Das Taylorpolynom n -ten Grades an der Entwicklungsstelle $a \in I$ ist dann definiert durch

$$T_n f(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

¹⁰ Die Verwendung von Polynomen ist dadurch motiviert, dass der Umgang mit diesen relativ „harmlos“ ist und man diese gut versteht: Sie sind z.B. beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen sind leicht zu berechnen.

¹¹ Manchmal auch *Entwicklungspunkt* genannt.

Grafische Veranschaulichung von Taylorpolynomen:

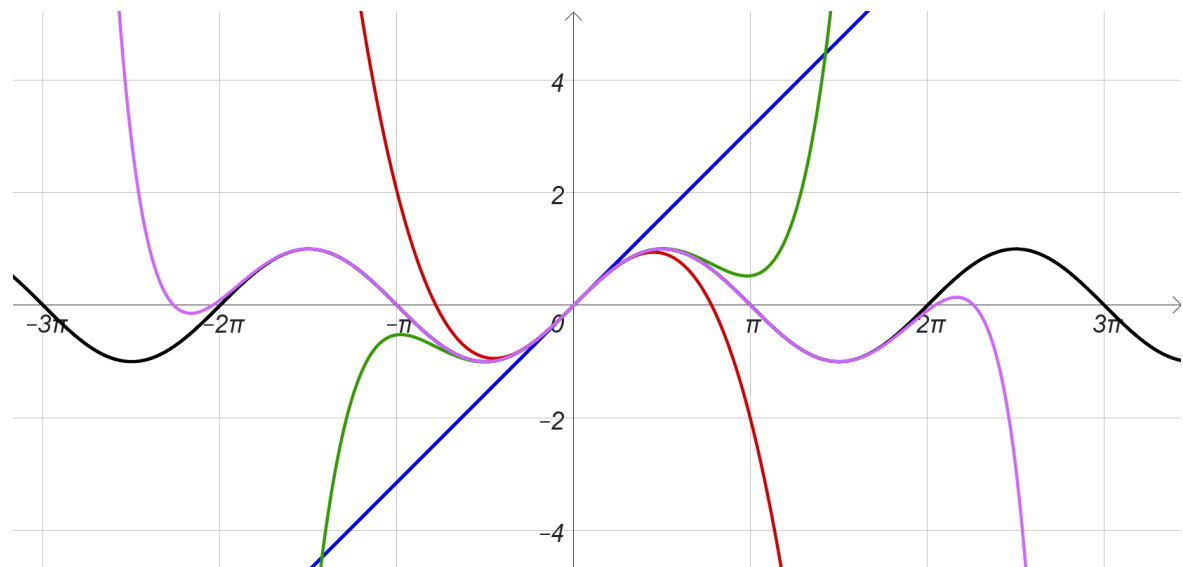


Abbildung 2: In schwarz der Graph der Sinusfunktion sowie deren Taylorpolynome ersten Grades (dunkelblau), dritten Grades (rot), fünften Grades (grün) und siebten Grades (lila) je an der Entwicklungsstelle $a = 0$

Für $n = 1$ ist das Taylorpolynom eine Gerade (lokale Approximation) und stimmt mit der Tangentengleichung im Punkt $(a|f(a))$ überein. Des Weiteren interessiert man sich in vielen Fällen für eine Approximation in $a = 0$, wodurch sich das n -te Taylorpolynom vereinfacht zu

$$T_n f(x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

2.2. Taylorentwicklung

Ist f beliebig oft differenzierbar, dann lässt sich die Definition eines Taylorpolynoms n -ten Grades an der Entwicklungsstelle $a \in I$ zu der der *Taylorreihe* von f an der Entwicklungsstelle a erweitern

$$T_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Es wäre nun zu erwarten, dass die Taylorreihe von f zumindest in einer Umgebung von a gegen f konvergiert, aber dies ist i.A. nicht der Fall. Konvergiert hingegen die Taylorreihe lokal um a gegen f , so sagt man f besitzt eine *Taylorentwicklung* in a . Wichtige Taylorentwicklungen (sogar auf ganz \mathbb{R}) mit den Entwicklungsstellen $a = 0$ sind:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Aus der Taylorentwicklung der e -Funktion lässt sich zudem eine Reihendarstellung für die eulersche Zahl e gewinnen. Setzt man in diese nämlich $x = 1$ ein, erhält man

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$